# Kapitel 4

# Funktionen und Stetigkeit

In diesem Kapitel beginnen wir Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ systematisch zu untersuchen. Dazu bauen wir auf den Begriff des metrischen Raumes auf und erhalten offene und abgeschlossene Mengen. Mit diesen definieren wir den Begriff der Stetigkeit von Funktionen und geben dann einen wichtigen Satz der die Gleichwertigkeit verschiedener Konzepte zeigt. Diese Gleichwertigkeit werden wir im Folgenden oft ausnutezen. Diese wird auch in anderen Teilen der Mathematik oft benötigt, so wird der zentrale Satz dieses kapitels sicher in Ihrem Studium oft auftauchen.

## Inhaltsangabe



## 4.1 Grundlegende Konstruktionen

Wir hatten die Begriffe offenes, bzw. abgeschlossenes Intervall (vgl. Definitionen 2.7.1, 2.5.6) definiert. Wir wollen diese Begriffe etwas verallgemeinern.

**Definition 4.1.1 (Offene/abgeschlossene Mengen)**
*Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum.*

1. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* offen, *wenn zu jedem Punkt $x_0 \in A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Menge*

$$B_\varepsilon(x_0) = \left\{ x \in X \,\middle|\, d(x, x_0) < \varepsilon \right\}$$

   *in $A$ enthalten ist, d.h. $B_\varepsilon(x_0) \subset A$. Wir nennen $B_\varepsilon(x_0)$ die $\varepsilon$-Kugel um $x_0$.*

2. *Eine Teilmenge $C \subset X$ heißt* abgeschlossen, *wenn $X \setminus C$ offen ist.*

**Bemerkung 4.1.2 (Offene Intervalle sind offen)**
*Offene Intervalle sind offene Mengen, abgeschlossene Intervalle abgeschlossene Mengen im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$. Es gibt mehr offene Mengen in $(\mathbb{R}, d)$ als die offenen Intervalle, z.B. die Vereinigung zweier disjunkter offener Intervalle. Die Definition der Offenheit von $A$ besagt, dass zu $x_0 \in A$ noch eine $\varepsilon$-Kugel um $x_0$ in $A$ liegt, wobei natürlich $\varepsilon$ von $x_0$ abhängt und hinreichend klein ist.*

**Lemma 4.1.3 (Offene Mengen)**
*Offene Mengen haben die folgenden Eigenschaften:*

1. *$X$ ist eine offene Teilmenge.*

2. *$\emptyset$ ist eine offene Teilmenge.*

3. *Jede Vereinigung von Familien offener Mengen ist offen, d.h. ist $\mathfrak{S}$ eine Menge offener Mengen, so ist*

$$\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$$

   *eine offene Menge.*

4. *Endliche Schnitte offener Mengen sind offen, d.h. sind $A_1, \ldots, A_n$ offene Teilmengen eines metrischen Raumes $X$, so ist*

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

   *offen.*

**Beweis.** Bei der ersten Aussage gibt es nichts zu zeigen. Die zweite Aussage folgt aus dem üblichen logischen Trick, da es in $\emptyset$ kein $x_0$ gibt, ist jede Aussage über ein solches $x_0$ wahr. Wir kommen zur dritten Aussage: ist $\mathfrak{S}$ eine Menge offener Mengen, und $x_0$ in der Vereinigung all dieser Mengen. Dann ist $x_0 \in S$, für ein $S$ und demnach, finden wir ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_0) \subset S$ und diese Menge $B_\varepsilon(x_0)$ ist dann auch in der Vereinigung.

Die letzte Aussage ist ähnlich einfach. Haben wir endlich viele $S_i$, $i = 1, \ldots, n$ offener Mengen und $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n S_i = S$. Dann gibt es für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\varepsilon_i > 0$, so dass

$$B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset S_i.$$

Sei $\varepsilon_0 = \min \left\{ \varepsilon_i \,\middle|\, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$. Dann ist für $i = 1, \ldots, n$

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset S_i$$

und damit ist $B_{\varepsilon_0} \subset S$ und dies war zu zeigen. □

**Lemma 4.1.4 (Abgeschlossene Mengen)**
*Abgeschlossene Mengen haben die folgenden Eigenschaften:*

1. *$X$ ist eine abgeschlossene Teilmenge.*

2. *$\emptyset$ ist eine abgeschlossene Teilmenge.*

3. *Jeder Durchschnitt von Familien abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen, d.h. ist $\mathfrak{C}$ eine Menge abgeschlossener Mengen, so ist*

$$\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C$$

*eine abgeschlossene Menge.*

4. *Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, d.h. sind $C_1, \ldots, C_n$ abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes $X$, so ist*

$$\bigcup_{j=1}^n C_j$$

*abgeschlossen.*

**Beweis.** Die ersten beiden folgen aus den beiden ersten über offene Mengen (in vertauschter Reihenfolge). Die letzten beiden folgen wieder aus den Regeln über Komplementbildung für Vereinigung und Durchschnitt von Mengen. □

Wir können nun eine etwas unschöne Definition aus dem zweiten Kapitel korrigieren.

**Definition 4.1.5 (Intervall)**
*Ein* Intervall $I$ *in* $\mathbb{R}$ *ist eine Teilmenge, so dass* $x, y \in I$ *und* $x < c < y$ *impliziert* $c \in I$.

Damit werden die Begriffe offenes und abgeschlossenes Intervall klar.

**Lemma 4.1.6 (Intervalle und Metrik)**
*Offene bzw. abgeschlossene Intervalle sind Intervalle, die im Sinne der Metrik offen bzw. abgeschlossen sind und umgekehrt.*

**Beweis.** Ist aufgrund der Definition klar. □

Hat man eine Menge $A \subset X$, so gibt es eine abgeschlossene Menge $C$ mit $A \subset C$, z.B. $C = X$. Da beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind, ist es sinnvoll folgende Konstruktion zu betrachten.

**Definition 4.1.7 (Abschluss)**
*Ist* $A$ *eine Teilmenge eines metrischen Raumes* $X$*. So ist*

$$\overline{A} = \bigcap_{\{C \,|\, C \text{ ist abgeschlossen, } C \supset A\}} C$$

*der* Abschluss *von* $A$.

**Bemerkung 4.1.8 (Abschluss einer abgeschlossenen Menge)**
*Für eine abgeschlossene Menge* $C$ *gilt* $\overline{C} = C$*. Warum?*

Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so ist $X \setminus \overline{A}$ offen und daher ist die folgende Aussage leicht einsehbar.

**Satz 4.1.9 (Häufungspunkt und Abschluss)**
*Es sei* $A$ *eine Teilmenge eines metrischen Raumes* $(X, d)$*. Für eine Folge* $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *gelte* $x_n \in A$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann gilt: ist* $x_0$ *ein Häufungspunkt der Folge* $\mathbf{x}$*, so ist* $x_0 \in \overline{A}$.

**Beweis.** Da $X \setminus \overline{A}$ offen ist, folgt aus der Annahme $x_0 \notin \overline{A}$, dass $x_0 \in X \setminus \overline{A}$ und es daher ein $\delta > 0$ gibt mit $B_\delta(x_0) \subset \left(X \setminus \overline{A}\right)$. Dann gibt es in $B_\delta(x_0)$ keine Folgenglieder unserer Folge, also ist $x_0$ kein Häufungspunkt und wir erhalten einen Widerspruch. □

**Satz 4.1.10 (Häufungspunkte einer Folge)**
*Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge. Sei $A$ die zugrundeliegende Menge, d.h. $A = \left\{x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Dann gilt*

1. $$\overline{A} = A \cup \left\{\xi \,\middle|\, \xi \text{ ist Häufungspunkt der Folge } \mathbf{x}\right\}.$$

2. *Die Menge der Häufungspunkte von $\mathbf{x}$ ist gegeben durch*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}, \text{ wobei } A_n = \left\{x_{n+j} \,\middle|\, j \in \mathbb{N}\right\} \text{ ist }.$$

**Beweis.** (1) Zunächst wissen wir bereits, dass

$$A \cup \left\{\xi \,\middle|\, \xi \text{ ist Häufungspunkt der Folge } \mathbf{x}\right\} \subset \overline{A}.$$

Angenommen $\overline{A}$ enthalte weitere Punkte. Dann gibt es einen Punkt $x \in \overline{A}$, der weder in $A$ liegt, noch enthält jede $\varepsilon$-Umgebung unendlich viele Glieder von $\mathbf{x}$. Also gilt $x \notin A$ und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $A \cap B_\varepsilon(x)$ hat endlich viele Punkte. Dann kann man ein $\varepsilon' > 0$ finden mit $B_{\varepsilon'}(x) \cap A = \emptyset$ und $x \in \overline{A}^c$.
(2) Offenkundig ist aufgrund von (1) jeder Häufungspunkt von $\mathbf{x}$ in dem genannten Durchschnitt enthalten. Die Umkehrung folgt sofort aus der Definition des Häufungspunktes. □

Eine weitere wichtige Klasse von Mengen sind sogenannte kompakte Mengen.

**Definition 4.1.11 (Kompakte Menge)**

1. *Es sei $K \subset X$ eine Teilmenge. Eine Familie von offenen Mengen $\mathfrak{S}$ heißt eine offene Überdeckung von $K$, falls*

$$K \subset \bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S$$

*ist.*

2. *Eine Menge $K \subset X$ heißt kompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{S}$ eine endliche Teilmenge $S_i \in \mathfrak{S}$, $i = 1, \dots, n$ ausgewählt werden kann, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^n S_i$. Man sagt dafür: aus jeder offenen Überdeckung kann eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden.*

**Lemma 4.1.12 (Kompakte Mengen sind abgeschlossen)**
*Kompakte Mengen sind abgeschlossen.*

**Beweis.** Ist $K$ kompakt, $x_0 \in X \setminus K$. Dann ist für $y \in K$ der Abstand $d(x_0, y) > 0$

und

$$x_0 \notin \bigcup_{y \in K} B_{\frac{1}{2}d(x_0,y)}(y).$$

Die Mengen $\left\{ B_{\frac{1}{2}d(x_0,y)}(y) \,\middle|\, y \in K \right\}$ bilden eine offene Überdeckung von $K$, da $K$ kompakt ist, können wir endlich viele Mengen der Form $B_{\frac{1}{2}d(y_i,x_0)}(y_i)$ auswählen und diese bilden eine Überdeckung von $K$. Sei

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \left\{ d(y_i, x_0) \,\middle|\, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Dann ist $B_\varepsilon(x_0) \cap K$ leer, denn für ein $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap K$ würde gelten $x \in B_{\frac{1}{2}d(x_0,y)}(y)$ für ein $y_i \in K$ und daher

$$d(x_0, y_i) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < \varepsilon + \frac{1}{2}d(y_i, x_0) \leq \frac{1}{2}d(y_i, x_0) + \frac{1}{2}d(y_i, x_0).$$

Daher ist $B_\varepsilon(x_0) \subset X \setminus K$ und $K$ ist abgeschlossen. □

**Aufgabe 4.1.13 (Teilmengen kompakter Mengen)**
*Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.*

**Satz 4.1.14 (Bolzano-Weierstraß)**
*In $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

**Beweis.** Angenommen $K$ ist in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ kompakt, dann ist $K$ nach Lemma 4.1.12 abgeschlossen. Die Mengen $B_n(0) = \left\{ y \,\middle|\, |y| < n \right\}$ bilden eine offene Überdeckung von $K$. Ist $K$ nicht beschränkt, so kann man keine endliche Teilüberdeckung auswählen. Also folgt aus der Kompaktheit die Beschränktheit.

Wir kommen zur Umkehrung. Angenommen $K$ ist abgeschlossen und beschränkt. Sei $\mathfrak{S}$ eine offene Überdeckung. Wir beweisen zunächst eine Teilbehauptung, dass es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in K$ gilt: es gibt ein $S \in \mathfrak{S}$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset S$. Eine solche Zahl heißt *Lebesgue-Zahl*[1] Der Beweis dieser Teilbehauptung wird durch Widerspruch geführt: angenommen eine solche Zahl existierte nicht.

$$(*) \quad \begin{cases} \text{Dann gibt es zu jedem } n \in \mathbb{N} \text{ ein } x_n \in K \text{ mit } B_{2^{-n}}(x_n) \\ \text{liegt in keinem } S \text{ in } \mathfrak{S}. \end{cases}$$

[1]Henri Léon Lebesgue (28.6.1875-26.7.1941) erkannte die Unzulänglichkeit des Riemannschen Integralbegriffes und fand die nach ihm benannte Verallgemeinerung. Damit prägte Lebesgue die mathematische Entwicklung grundlegend. Die moderne Theorie partieller Differentialgleichungen wäre ohne dieses Werk nicht denkbar. Beide Integralbegriffe werden wir im Laufe des Analysis-Zyklus kennenlernen.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 2.5.12 hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $x_0$. Dann gibt es, wegen der Überdeckungseigenschaft von $\mathfrak{S}$ ein $S \in \mathfrak{S}$ mit $x_0 \in S$. Sei nun $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset S$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} < \frac{\delta}{2}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ mit $x_n \in B_\delta(x_0) \subset S$. Dann ist aber $B_{2^{-n}}(x_n) \subset B_\delta(x_0) \subset S$. Dies ist ein Widerspruch zu (*). Damit ist die Existenz einer solchen Lebesgueschen Zahl bewiesen.

Wir betrachten nun die Überdeckung von $K$ gegeben durch $\left\{B_\varepsilon(x) \;\middle|\; x \in K\right\}$. Wenn hieraus eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann, sind wir fertig, denn jede dieser Mengen liegt in einem Element $\mathfrak{S}$, die dadurch erhaltene Auswahl von endlich vielen Elementen in $\mathfrak{S}$ ergäbe eine endliche Überdeckung. Wähle $x_1 \in K$ und dann induktiv eine Folge $x_n \notin \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$. Dann ist $d(x_n, x_j) > \varepsilon$ für jedes $j < n$. Daher hat die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt in $K$, im Widerspruch zum Satz von Bolzano-Weierstraß.

Also reichen endlich viele der $B_\varepsilon(x)$ die Menge $K$ zu überdecken und damit ist der Satz gezeigt. □

## 4.2 Stetigkeit von Funktionen

Ein wichtiger Begriff der Analysis, der eng mit dem anderen uns bisher bekannten Begriff der Konvergenz zusammenhängt, ist die Stetigkeit.

**Definition 4.2.1**
*Es seien $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ ein metrische Räume, eine Funktion $f : X \to Y$, $D(f) \subset X$ sei eine offene Teilmenge und $x_0 \in D(f)$. Dann heißt $f$* stetig im Punkt $x_0$, *wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $d_X(x, x_0) < \delta$ folgt, $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.*

**Bemerkung 4.2.2**
*Wir sagen auch, eine Funktion heißt stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so dass $f$ die $\delta$-Kugel um $x_0$ in die $\varepsilon$-Kugel um $f(x_0)$ abbildet. Eine anschauliche Vorstellung soll durch das nachfolgende Bild vermittelt werden.*

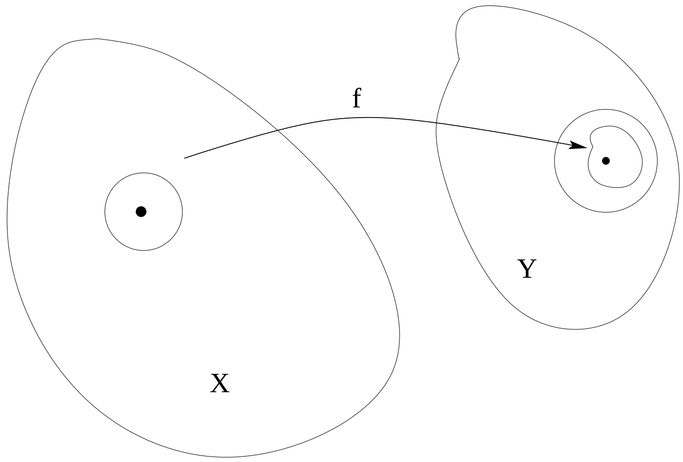


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Stetigkeit

**Beispiel 4.2.3 (Unstetigkeit)**

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1, & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig, wir nennen dies auch *unstetig*. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt kein $\delta > 0$, so dass $0 < x < \delta$ impliziert $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$. In allen anderen Punkten ist diese Funktion stetig.

2. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z$ ist in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ stetig, mit $\delta = \varepsilon$.

3. Durch $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ führen wir eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ (vgl. $|z|$ für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$). Die Funktion $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ (x, y) \mapsto x + y$ ist in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. Gleiches gilt für die Funktion $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$. Wir wollen uns die Begründung nur für den ersten Fall ansehen. Seien $(x_0, y_0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle

$$\delta = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Dann ist für $d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$ (wegen $\frac{1}{2}(a + b) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq (a + b)$ für $a, b \geq 0$)

$$|(x_0+y_0)-(x+y)| \leq |x-x_0|+|y-y_0| < 2\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2} < 2\delta = \varepsilon.$$

**Definition 4.2.4 (Stetigkeit)**
*Eine Funktion $f : X \to Y$ mit $D(f) = X$ heißt* stetig auf $X$, *falls $f$ in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.*

**Beispiel 4.2.5 (Kontraktionen sind stetig)**
Ist $(X, d)$ ein metrischer Raum und ist $f : X \to X$, $D(f) = X$ eine Abbildung, so dass eine Zahl $0 < \lambda$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ gilt,

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Dann ist $f$ stetig. Wähle $x_0 \in X$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Ist nun $d(x, x_0) < \delta$, so gilt $d(f(x), f(x_0)) \leq \lambda d(x, x_0) < \lambda\delta = \varepsilon$.

Stetigkeit kann auf verschiedene andere Weisen charakterisiert werden. Wir wollen einige davon angeben und beweisen.

**Satz 4.2.6 (Hauptsatz über stetige Abbildungen)**
*Eine $f : X \to Y$, $D(f) = X$ eine Funktion. $f$ ist genau dann stetig, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen.*
2. *Für jede abgeschlossene Menge $K \subset Y$ ist $f^{-1}(K)$ abgeschlossen.*
3. *Für jede Menge $A$ gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
4. *Ist $x_0 \in X$ und ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

**Beweis.** Wir beweisen dies nach dem Schema
Stetigkeit $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ Stetigkeit.

1. Ist $U \subset Y$ offen und $x \in f^{-1}(U)$. Sei $y = f(x)$. Da $U$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(y) \subset U$. Zu diesem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(y)$. Also ist $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y)) \subset f^{-1}(U)$.

2. Sei $K \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist $A = Y \setminus K$ offen und $f^{-1}(A)$ ist offen. Da $f^{-1}(K) = X \setminus f^{-1}(A)$ ist, folgt $f^{-1}(K)$ ist abgeschlossen.

3. Sei $A \subset X$. Dann ist $\overline{f(A)}$ abgeschlossen, also $f^{-1}(\overline{f(A)})$ abgeschlossen und $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Also ist $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Dann folgt

$$f(\overline{A}) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) = \overline{f(A)}.$$

4. Sei $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Setze $A_n = \left\{ x_{n+j} \,\middle|\, j \in \mathbb{N} \right\}$. Dann ist
$$x_0 \in \overline{A_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Aus Satz 4.1.10 folgt sogar
$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$
Dann ist
$$f(x_0) \in f(\overline{A_n}) \subset \overline{f(A_n)}$$
und
$$f(x_0) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(\overline{A_n}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(A_n)}.$$
Damit $f(x_0)$ Häufungspunkt der Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Angenommen $z'$ sei ein weiterer Häufungspunkt dieser Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = z'$. Aufgrund des ersten Argumentes angewendet auf die Folge $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist $f(x_0)$ ein Häufungspunkt, dies impliziert $z' = f(x_0)$.

5. Fixiere $x_0 \in X$. Angenommen $f$ ist im Punkt $x_0$ nicht stetig, dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\delta > 0$ ein $x$ mit $d(x, x_0) < \varepsilon$, so dass $d(f(x), f(x_0)) > \varepsilon$. Wähle $\delta_n = \frac{1}{n}$ und $x_n < \delta_n$ mit $d(f(x_n), f(x_0)) > \varepsilon$. Dann ist
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ und } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existiert nicht oder ist nicht } f(x_0).$$
Damit haben wir einen Widerspruch zur Voraussetzung.

□

**Bemerkung 4.2.7**
Beachte, die dritte Eigenschaft ist oft bei theoretischen Betrachtungen wichtig, die vierte oft in praktischen Betrachtungen.

**Korollar 4.2.8 (Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen)**
*Eine Funktion $f$ ist genau dann in einem Punkt $x_0$ stetig, wenn für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

**Beweis.** Eine Richtung aus Teil 5 des letzten Beweises, die andere direkt aus den Definitionen. □

**Definition 4.2.9 (Kontinuierlicher Grenzwert)**
*Wir sagen* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_n)$*, falls für jede Folge* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

**Korollar 4.2.10 (Rechnen mit stetigen Funktionen)**
*Für stetige Funktionen gilt:*

1. *Sind* $f, g : X \to Y$ *stetig, so sind* $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ *stetig,* $f/g$ *ist allen Punkten* $x$ *stetig, für die gilt* $g(x) \neq 0$.

2. *Sind* $X, Y, Z$ *metrische Räume und sind* $g : X \to Y$ *und* $f : Y \to Z$ *stetig, so ist* $f \circ g : X \to Z$ *stetig.*

**Beweis.** Die erste Behauptung folgt aus der Charakterisierung stetiger Funktionen Satz 4.2.6 (4) und Satz 2.5.4.

Die zweite Behauptung sieht man wie folgt: sei $x_0 \in X$, $y_0 = g(x_0)$ und $z_0 = f(y_0)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. dann gibt es ein $\delta >$, so dass $f(B_\delta(y_0)) \subset B_\varepsilon(x_0))$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $g$ ein $\delta' > 0$ mit $g(B_{\delta'}(z_0)) \subset B_\delta(y_0)$. dann ist aber

$$f \circ g(B_{delta'}(x_0) \subset f(B_\delta(y_0)) \subset B_\varepsilon(z_0).$$

□

Im folgenden wollen wir einige wichtige Beispiele behandeln.

**Definition 4.2.11 (Polynom)**
*Eine Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(*$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*) heißt komplexes (reelles)* Polynom, *wenn es ein* $n \in \mathbb{N}$ *und Zahlen* $a_0, \dots a_n \in \mathbb{C}$ *(*$\in \mathbb{R}$*) gibt mit*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \ \ z \in \mathbb{C} \ (z \in \mathbb{R}).$$

*Die größte Zahl* $n$ *mit* $a_n \neq 0$ *heißt der* Grad *des Polynoms.*

**Satz 4.2.12 (Klassen stetiger Funktionen)**

1. *Ist* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*) ein Polynom, so ist* $f$ *stetig.*

2. *Die Exponentialfunktion ist auf* $\mathbb{R}$*, bzw. auf* $\mathbb{C}$ *stetig.*

3. *Die Funktionen* sin, cos *sind auf* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *stetig.*

**Beweis.**

1. Aus der Stetigkeit von $z \mapsto z$ folgt mit Korollar 4.2.10, dass $z \mapsto z^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ stetig ist, weiterhin ist $z \mapsto a_k z^k$ stetig und schließlich mit der

gleichen Begründung $z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_k z^k$.

2. Wir untersuchen die Stetigkeit im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und schreiben $z = z - z_0 + z_0$. Dann ist

$$|E(z) - E(z_0)| = |E(z - z_0)E(z_0) - E(z_0)| = |E(z_0)||E(z - z_0) - 1|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, setze $\varepsilon' = \varepsilon/|E(z_0)|$. Gibt es nun ein $\delta > 0$, so dass $|z - z_0| < \delta$ impliziert, dass $|E(z - z_0) - 1| < \varepsilon'$ dann ist $|E(z) - E(z_0)| < \varepsilon$. Damit folgt aus der Stetigkeit bei $z = 0$ die Stetigkeit bei $z_0$.

Zu zeigen ist also, zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|z| < \delta$ impliziert $|E(z) - 1| < \varepsilon$. Aus der Fehlerabschätzung für die Exponentialreihe Satz 3.5.3 folgt, für $|z| < \delta = \varepsilon/2$ ist

$$|E(z) - 1| = |(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k) - 1| \leq f_1(z) \leq 2|z| < 2\delta = \varepsilon.$$

3. Wir betrachten die cos-Funktion, der Beweis im Fall der sin-Funktion ist entsprechend. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Die grundlegende Beobachtung ist ganz einfach: wir approximieren die cos-Funktion durch ein Polynom $n$-ten Grades (der durch Abschneiden der definierenden Reihe entsteht) $p_n(z)$ Dies Polynom ist stetig und wir schreiben

$$\begin{aligned} |\cos(z) - \cos(z_0)| &= |\cos(z) - p_n(z) + p_n(z) - p_n(z_0) + p_n(z_0) - \cos(z_0)| \\ &\leq |\cos(z) - p_n(z)| + |p_n(z) - p_n(z_0)| + |p_n(z_0) - \cos(z_0)|. \end{aligned}$$

Der mittlere Term wird aufgrund der bereits bewiesenen Stetigkeit von Polynomen durch $\varepsilon/3$ abgeschätzt, falls nur $|z - z_0|$ hinreichend klein ist, anders gesagt, es gibt ein $\delta_1 > 0$, so dass $|z - z_0| < \delta_1$ impliziert $|p_n(z) - p_n(z_0)| < \varepsilon/3$. Nun müssen wir nur noch zeigen, dass auf einer $\delta_2$-Umgebung um $z_0$ die Differenz $|\cos(z) - p_n(z)| < \varepsilon/3$ abgeschätzt werden kann. Da der Beweis von Satz 3.5.3 eine entsprechende Abschätzung für die cos-Funktion liefert kann dies erreicht werden. Damit ist die Behauptung gezeigt.

□

## 4.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir wollen nun wesentliche Eigenschaften stetiger Funktionen notieren. Diese sind von fundamentaler Wichtigkeit nicht nur für die Analysis, sondern für alle Bereiche in denen Mathematik eine Rolle spielt. Wir werden zunächst einen einfachen Satz kennenlernen, der sich als Grundprinzip aller analytischen Methoden zur Lösung von Gleichungen erweist.

**Satz 4.3.1 (Zwischenwertsatz)**
*Es sei $I$ ein Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ stetig (insbesondere überall definiert). Gibt es $x_1 < x_2 \in I$ mit $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, so existiert ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_0) = 0$.*

**Beweis.** Betrachte $X = [x_1, x_2]$ mit der üblichen Metrik. $X$ ist vollständiger metrischer Raum. Setze $g : X \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ (Einschränkung von $f$ auf $X$). $g$ ist stetig auf $X$. Setze $M = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) < 0\right\}$. $M$ ist offen, nach dem Hauptsatz über stetige Funktionen (Satz 4.2.6) (1) und $M \neq I$, denn $x_2 \notin M$. Sei nun

$$\xi = \sup M.$$

Dann ist $\xi > x_1$, da $M$ offen ist und $x_1 \in M$. $\xi < x_2$, denn $f(x_2) > 0$.

Dann ist $f(\xi) \leq 0$, denn $f(\xi) > 0$ impliziert die Existenz von $\delta > 0$, so dass $g > 0$ auf $B_\delta(\xi)$ ist. Dies widerspricht der Supremumseigenschaft von $\xi$.

Wäre $f(\xi) < 0$, so könnten wir eine $\delta$-Kugel im $\xi$ in $M$ finden, was wiederum der Konstruktion von $\xi$ widerspricht. □

**Bemerkung 4.3.2 (Umgekehrte Ungleichung)**
*Eine entsprechende Aussage ist richtig, wenn $f(x_1) > 0 > f(x_2)$. Der Beweis ist natürlich eine einfache Modifikation des angegebenen Beweises.*

**Korollar 4.3.3 (Zwischenwertsatz)**
*Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $x_1, x_2 \in I$ und $c \in [f(x_1), f(x_2)]$, so gibt es ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = c$.*

**Beweis.** Betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - c$. Dann sind die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes erfüllt, und es gibt ein $\xi$mit $F(\xi) = 0$, d.h $f(\xi) = c$. □

**Satz 4.3.4 (Stetige Bilder von Intervallen)**
*Ist $f$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $I$, so ist $f(I)$ ein Intervall.*

**Beweis.** Sind $y_1 < y_2 \in f(I)$, so ist nach dem Korollar 4.3.3 jeder Wert $y_1 < c < y_2$ in $f(I)$. Damit ist $f(I)$ ein Intervall. □

**Satz 4.3.5 (Stetige Bilder kompakter Mengen)**
*Sind $X, Y$ metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig und ist $K \subset X$ kompakt, so ist $f(K)$ kompakt*

**Beweis.** Ist $\mathfrak{S}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, so ist für $S \in \mathfrak{S}$ die Menge

$f^{-1}(S)$ wegen Satz 4.2.6 (1) offen. Also ist

$$\left\{ f^{-1}(S) \;\middle|\; S \in \mathfrak{S} \right\}$$

eine offene Überdeckung von $K$, und wir können daraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h. es gibt $S_1, \ldots, S_n$ mit

$$\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(S_k)$$

überdeckt $K$. Dann ist

$$f(K) \subset \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(S_k)) = \bigcup_{k=1}^{n} S_k.$$

□

**Korollar 4.3.6 (Annahme von Minimum/Maximum)**
*Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $I$ nimmt Maximum und Minimum an, d.h. es existieren $x_1, x_2$ mit*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

*für alle $x \in I$ .*

**Beweis.** $f(I)$ ist ein kompaktes Intervall, insbesondere ein abgeschlossenes Intervall, d.h. von der Form $\{x \mid a \leq x \leq b\}$. Also gibt es ein $x_1 \in I$ mit $f(x_1) = a$ und ein $x_2 \in I$ mit $f(x_2) = b$. □

Ein wichtiger Begriff, der mit dem Begriff der Stetigkeit eng verwandt ist, wird nun eingeführt.

**Definition 4.3.7 (Gleichmäßig stetig)**
*Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. $f$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d(x_1, x_2) < \delta$ impliziert $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.*

**Aufgabe 4.3.8**
*Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}, D(f) = (0,1]$ ist auf $(0,1]$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.*

**Satz 4.3.9 (Stetige Funktionen auf Kompakta)**
*Eine auf einer kompakten Menge $K$ stetigen Funktion $f : X \to Y$ ist auf $K$ gleichmäßig stetig.*

**Beweis.** Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen der Stetigkeit zu jedem $x_0 \in K$ ein $\delta > 0$ und der Deutlichkeit halber, schreiben wir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, so dass $x \in B_\delta(x_0)$ impliziert $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Die Menge

$$\mathfrak{S} = \left\{ B_{\frac{1}{3}\delta(x_0, \frac{\varepsilon}{3})}(x_0) \;\middle|\; x_0 \in K \right\}$$

bildet eine offene Überdeckung von $K$. Wegen der Kompaktheit von $K$ reichen endlich viele

$$B_{\delta(x_i, \frac{\varepsilon}{3})}(x_i), i = 1, \ldots, n$$

$K$ zu überdecken. Wähle

$$\delta = \frac{1}{3} \min\{\delta(x_i, \frac{\varepsilon}{3}) \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Sind nun $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$. Dann gibt es ein $x_j$ mit $x \in B_{\delta(x_j, \frac{\varepsilon}{3})}(x_j)$ und ein $x_k$ mit $y \in B_{\delta(x_k, \frac{\varepsilon}{3})}(x_k)$ und

$$\begin{aligned} d(x_k, x_j) &\leq d(x_k, y) + d(y, x) + d(x, x_j) \\ &\leq \frac{1}{3}\left(\delta(x_k, \frac{\varepsilon}{3}) + \min\{\delta(x_i, \frac{\varepsilon}{3})\} + \delta(x_j, \frac{\varepsilon}{3})\right) \\ &\leq \max\{\delta(x_i, \frac{\varepsilon}{3}), \delta(x_k, \frac{\varepsilon}{3})\}. \end{aligned}$$

Nun können wir abschätzen

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(x_k)) + d(f(x_k), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

□

**Satz 4.3.10 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)**
*Sind $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume $D \subset X$ kompakt und ist $f : D \to Y$ und injektiv, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to X$ stetig.*

**Beweis.** Ist $D' \subset D$ abgeschlossen, so ist $D'$ kompakt (nach Aufgabe 4.1.13) und $f(D')$ ist kompakt, also abgeschlossen. Da $f = (f^{-1})^{-1}$, ist, bildet für $f^{-1}$ das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen und daher nach Satz 4.2.6 (2) $f^{-1}$ stetig. □

Als Anwendung des Zwischenwertsatzes vermerken wir noch die folgende Aussage.

**Lemma 4.3.11 (Eine positive Nullstelle des Kosinus)**
*Es gibt ein $x_0 \in (0, 2)$ mit $\cos(x_0) = 0$.*

**Beweis.** In den Übungen wurde gezeigt $\cos(0) = 1,\ \cos(2) < 0$. Also gibt es aufgrund des Zwischenwertsatzes Satz 4.3.1 ein solches $x_0$. □

**Definition 4.3.12 (Die Zahl $\pi$)**
*Ist $x_0$ die kleinste positive Nullstelle von* $\cos$ *so wird die Zahl $2x_0$ als $\pi$ bezeichnet.*

**Definition 4.3.13 (Periode)**
*Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird für eine positive Zahl $p$ als $p$-periodisch bezeichnet, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$f(x + p) = f(x).$$

*Ist $p$ die kleinste positive Zahl mit dieser Eigenschaft, so wird $p$ als minimale Periode bezeichnet.*

**Satz 4.3.14**
*Die Funktionen* $\sin, \cos$ *sind $2\pi$-periodisch. $2\pi$ ist die minimale Periode dieser Funktionen.*

**Beweis.** Siehe Übungen □

## 4.4 Funktionenfolgen und Konvergenz

**Definition 4.4.1 (Konvergenz von Funktionenfolgen)**
*Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f_n : X \to Y$ seien Funktionen mit $D(f_n) = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen die Folge*

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert *gegen eine Funktion $f : X \to Y$, falls für jedes $x \in X$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

*Wegen dieser* punktweisen *Forderung sprechen wir auch von* punktweiser Konvergenz.

**Beispiel 4.4.2 (Beispiel einer konvergenten Funktionenfolge)**
*Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$, $D(f) = [0, 1]$ konvergiert gegen die Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{für} \quad x = 1. \end{cases}$$

**Definition 4.4.3 (Gleichmäßige Konvergenz)**
*Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $f_n : X \to Y$ seien Funktionen mit $D(f_n) = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen die Folge*

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert gleichmäßig *gegen eine Funktion $f : X \to Y$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in X$ und alle $n > N$ gilt*

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

**Satz 4.4.4 (Grenzwerte gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen)**
*Konvergiert eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen gleichmäßig gegen eine Funktion $f$, so ist $f$ stetig.*

**Beweis.** Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n > N$ und alle $x \in X$ gilt

$$d_Y(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wähle $n > N$ und $\delta > 0$ so dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt

$$d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann ist für $x \in B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x_0)) &\leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist $f$ stetig im Punkt $x_0$, da $x_0$ beliebig war, ist $f$ stetig. □

**Definition 4.4.5 (Funktionenräume)**
*Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Wir definieren die Räume stetiger Funktionen durch*

$$C(X; \mathbb{R}) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist stetig} \right\}$$

*bzw.*

$$C(X; \mathbb{C}) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \;\middle|\; f \text{ ist stetig.} \right\}$$

**Aufgabe 4.4.6**

1. *Ist $X$ kompakt, so wird durch*

$$d_{C(X)}(f,g) = \sup\left\{|f(x)-g(x)| \;\middle|\; x \in X\right\}$$

*eine Metrik auf $C(X;\mathbb{R})$, bzw. $C(X,\mathbb{C})$ definiert.*

2. *$C(X;\mathbb{R})$, bzw. $C(X,\mathbb{C})$ sind mit der Metrik $d_{C(X)}$ jeweils ein vollständiger metrischer Raum.*

**Aufgabe 4.4.7**

*Etwas allgemeiner kann man für metrische Räume $(X,d_X)$, $(Y,d_Y)$ den Raum*

$$C(X,Y) = \left\{f : X \to Y \;\middle|\; f \text{ ist stetig}\right\}$$

*definieren. Ist $X$ kompakt wird darauf eine Metrik durch*

$$d_{C(X,Y)} = \sup\left\{d_Y(f(x),g(x)) \;\middle|\; x \in X\right\}$$

*erklärt.*
*Man zeige, $d_{C(X,Y)}$ macht $C(X,Y)$ zum metrischen Raum, $d_{C(X,Y)}$ ist genau dann vollständig, wenn $Y$ vollständig ist.*